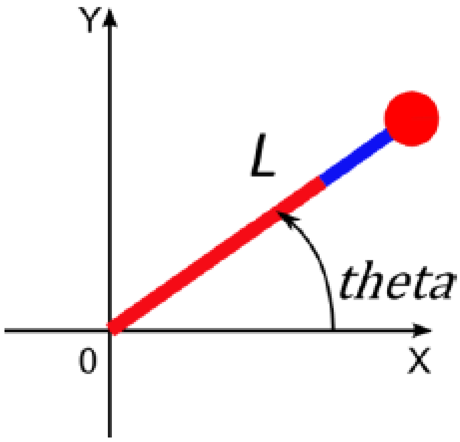
Instrukcja na zajęcia laboratoryjne z przedmiotu „Podstawy robotyki”

Zajęcia X – „Dynamika - model Lagrange’a”

Na rozciągliwym pręcie (np. sprężyna) o długości początkowej L_0 i sprężystości K_s zamontowana jest kulka o masie M.



Sprężyna gromadzi energię potencjalną o wartości:

$$E_{ps} = \frac{1}{2} K_s (L - L_0)^2, \text{ długość spoczynkowa - } L_0.$$

Położenie masy M w układzie współrzędnych wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{cases} x(t) = L(t) cos(\theta(t)) \\ y(t) = L(t) sin(\theta(t)) \end{cases}, \text{ dwie zmienne: } L(t),\ \theta(t)$$

Prędkość oraz kwadrat prędkości masy opisują wzory:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -L(t) \sin\big(\theta(t)\big) \dot{\theta}(t) + \dot{L}(t) \cos\big(\theta(t)\big) \\ \dot{y}(t) = L(t) \cos\big(\theta(t)\big) \dot{\theta}(t) + \dot{L}(t) \sin\big(\theta(t)\big) \end{cases}$$

$$v^2 = \dot{x}^2(t) + y^2(t) = L^2(t)\dot{\theta}^2(t) + \dot{L}^2(t)$$

Na podstawie powyższych, energia kinetyczna układu wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{v}^2 = \frac{1}{2} M [L^2(t)\dot{\theta}^2(t) + \dot{L}^2(t)]$$

Przyjmując za poziom oś OX, energia potencjalna wyznaczona jest wzorem:

$$E_p = MgL(t)sin(\theta(t)) + \frac{1}{2}K_s(L(t) - L_0)^2$$

Zatem potencjał Lagrange'a wynosi:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p$$
$$= \frac{1}{2}M\left[L^2(t)\,\dot{\theta}^2(t) + \dot{L}^2(t)\right] - MgL(t)\sin\big(\theta(t)\big) - \frac{1}{2}K_s(L(t) - L_0)^2$$

Różniczki potencjału Lagrange'a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta(t)} = MgL(t)\cos\big(\theta(t)\big) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L(t)} = ML(t)\dot{\theta}^2(t) - Mg\sin\big(\theta(t)\big) - K_s(L(t) - L_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(t)} = ML^2(t)\dot{\theta}(t) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}(t)} = M\dot{L}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(t)}\right) = ML^2(t)\ddot{\theta}(t) + 2ML(t)\dot{L}(t)\dot{\theta}(t) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}(t)}\right) = M\ddot{L}(t) \end{cases}$$

Na podstawie powyższych wzorów otrzymujemy równanie Lagrange'a:

$$\begin{cases} ML^2(t)\ddot{\theta}(t) + 2ML(t)\dot{L}(t)\dot{\theta}(t) + MgL(t)\cos\big(\theta(t)\big) = T_{torque} \\ M\ddot{L}(t) - ML(t)\dot{\theta}^2(t) + Mg\sin\big(\theta(t)\big) + K_s(L(t) - L_0) = T_{force} \end{cases}$$

Oraz jego zapis w postaci macierzowej:

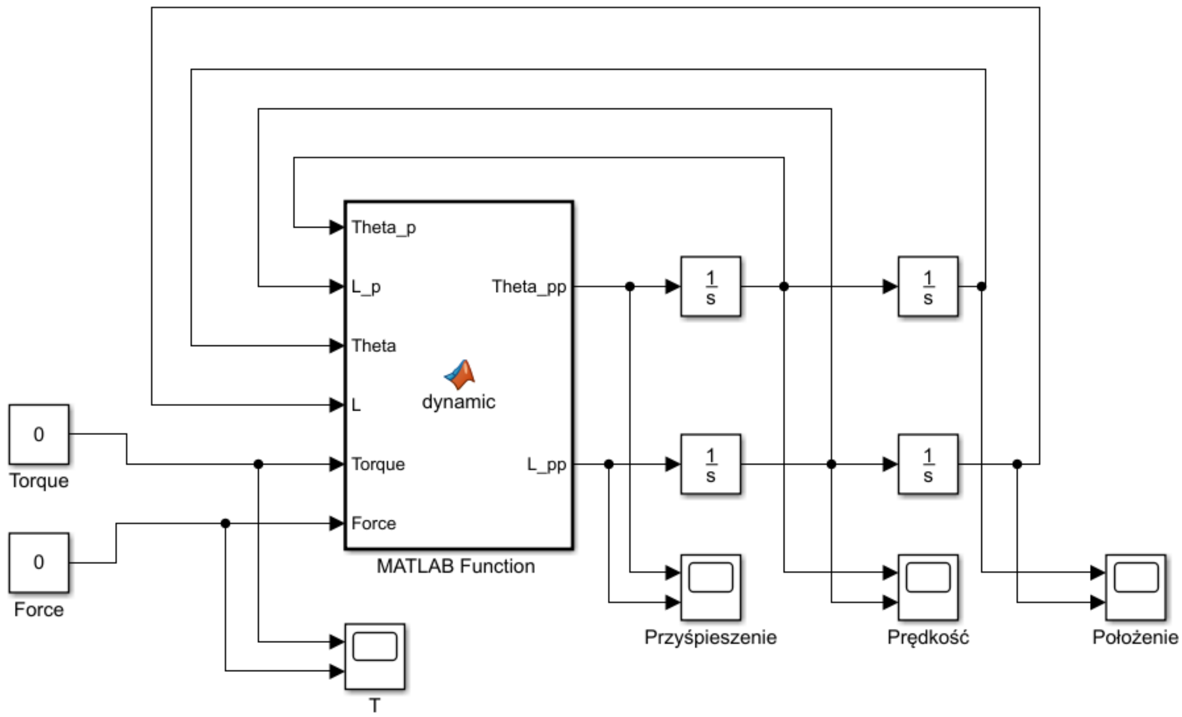
$$\begin{bmatrix} ML^2(t) & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{L}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ML(t)\dot{L}(t)\dot{\theta}(t) \\ -ML(t)\dot{\theta}^2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -MgL(t)\cos\big(\theta(t)\big) \\ Mg\sin\big(\theta(t)\big) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_s(L(t) - L_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{torque} \\ T_{force} \end{bmatrix}$$

$$D\ddot{q} + V + G + K = T$$

Do wyznaczenia macierzy $\ddot{q}$ skorzystamy z przekształcenia:

$$\ddot{q} = D^{-1}[T - V - G - K]$$

Wykorzystując powyższy wzór utwórz w Simulinku układ symulujący ruch opisanego wahadła dla określonego momentu i siły:



Odpowiednią konfigurację wejść oraz wyjść bloku MATLAB Function można uzyskać definiując w nim następujący nagłówek funkcji:

```
function [Theta_pp,L_pp] = dynamic(Theta_p, L_p, Theta, L, Torque, Force)
```

W blokach całkowania Integrator (Simulink->Contiuous->Integrator) jako parametr Initial Condition należy podać niewielką wartość początkową zwracaną przez dany blok w pierwszym kroku symulacji. Przykładowo może to być 0.1.

Tabela wartości stałych w zadaniu:

Symbol	Wartość
M	0.3
L_0	0.2
K_S	0.25
g	9.81